ЈДМ YUSM

ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ЗА МЕХАНИКУ 11000 - БЕОГРАД
Кнеза Милоша 9/I; Тел.: (+381 11) 342 273
YUGOSLAV SOCIETY OF MECHANICS, 11000 - BELGRADE
Kneza Miloša 9/I; Tel.: (+381 11) 342 273

ЈДМ YUSM

ЈУМЕХ '97 XXII ЈУГОСЛОВЕНСКИ КОНГРЕС ТЕОРИЈСКЕ И ПРИМЕЊЕНЕ МЕХАНИКЕ, ВРЊАЧКА БАЊА, 2 - 7 ЈУН 1997.
YUCTAM'97 XXII YUGOSLAV CONGRESS OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS, JUNE 2-7, 1997, VRNJAČKA BANJA

A.e.27.

O NEKIM UOPŠTENJIMA LUISOVIH INTEGRALA

Srboljub S. Simić
asistent
Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
Katedra za Tehničku mehaniku
Trg Dositeja Obradovića 6

A NOTE ON GENERALIZATION OF THE LEWIS-TYPE FIRST INTEGRALS

Abstract

In this paper the notion of the Lewis-type first integral is used in the study of time-dependent Duffing equation. The system is transformed into Hamiltonian form and the field-momentum method is used in the study of conservation laws. It is shown that dynamical system in consideration has the Lewis-type first integral, quadratic with respect to generalized momentum. It is emphasized that the existence of the conservation law is strongly related to the structure of the dynamical system.

1. Uvod

Proučavanje prvih integrala (zakona konzervacije) dinamičkih sistema jeste jedno od najatraktivnijih polja istraživanja u savremenoj teorijskoj fizici i analitičkoj mehanici. Značaj zakona konzervacije u analizi ponašanja sistema koji su opisani pomoću sistema običnih diferencijalnih jednačina (tj., dinamičkih sistema u klasičnom smislu) je ogroman. Ovde kratko napominjemo da su zakoni konzervacije ugaoni kamen kako analitičke mehanike, tako i teorijske i eksperimentalne fizike. Oni na jedan specifičan način odražavaju karakter samog dinamičkog sistema, a takođe nam, gotovo u svakom slučaju, omogućuju sagledavanje fizičkih mehanizama pod čijim se okriljem odvijaju posmatrani procesi. Sa druge strane, pragmatični ugao gledanja na ovu problematiku nam govori da postojanje prvih integrala olakšava, a ponekad i sasvim obezbeđuje integraciju diferencijalnih jednačina kretanja. Sasvim novo svetlo na ovu oblast bacio je Luisov (Lewis) rad [1] u kome su proučeni prvi integrali linearnog oscilatora sa jednim stepenom slobode, koji će poslužiti kao motivacija za studiju datu u ovom radu.

Pod pojmom Luisovog prvog integrala podrazumevaćemo kvadratni prvi integral po brzini linearnog oscilatora čija forma i konačni oblik zavisi od bilo kakvog rešenja jedne nelinearne obične diferencijalne jednačine. Konkretno, osnovni rezultat Luisovog rada sastoji se u tvrdnji da diferencijalna jednačina linearrnog oscilatora[1] sa jednim stepenom slobode:

$$\ddot{x}+\omega^2(t)x=0 \tag{1.1}$$

gde je t - nezavisno promenljiva - vreme, $(\ )^{\cdot}=d(\ )/dt$, a $\omega(t)$ je zadata funkcija vremena, ima kvadratni zakon konzervacije oblika:

$$(\dot{x}\rho-\dot{\rho}x)^2+(x/\rho)^2=const.,$$

pri čemu je ρ ma koje rešenje pomoćne jednačine:

---

[1]Opširnija pruočavanja pokazala su da se dometi Luisove teorije mogu proširiti i na neoscolatorne sisteme, što zanačajno povećava njohovu opštost. Naime, dobro je poznato u teoriji diferencijalnih jednačina da se opšta linearna diferencijalna jednačina: $a(t)\ddot{x}+b(t)\dot{x}+c(t)x=0$ određenom transformacijom može svesti na jednačinu (1.1).

$$\ddot{\rho}+\omega^2(t)\rho=\rho^{-3}.$$

Očito je da dobijeni rezultat predstavlja čitavu klasu zakona konzervacije. U nizu radova Luisa i drugih autora izvršeno je proširivanje prikazanog rezultata kroz analizu adijabatskih invarijanti [2] i zakona konzervacije [3] linearnih reonomnih dinamičkih sistema. Relativno nedavno neki autori [4,5] su radili na proširenju Luisove teorije na nelinearne reonomne dinamičke sisteme. Prilaz ovoj problematici, kako kod Luisa, tako i kod ostalih autora, kretao se, sa više ili manje uspeha, u okvirima primene *ad hoc* metoda.

Namera nam je da u ovom radu obavimo jednu detaljniju studiju kvadratnih prvih integrala reonomnih dinamičkih sistema koji se generalno modeliraju diferencijalnom jednačinom:

$$\ddot{x}+2k(t)\dot{x}+q(t)x=\lambda x^n f(t)+m(t) \tag{1.2}$$

u kojoj su $k(t)$, $q(t)$, $f(t)$ i $m(t)$ zadate funkcije vremena, a nezavisno promenljiva t je vreme. Mada je značaj ove jednačine poznat, napomenućemo da ona opisuje čitav niz nelinearnih oscilatornih procesa. Tada funkcija $k(t)$ odražava disipativna svojstva sistema, $q(t)$ i $f(t)$ opisuju mehanizam restitucije, a $m(t)$ predstavlja prinudno dejstvo. Pored toga, jednačina (1.2) reflektira i druge oblasti fizike i tehnike koje ne moraju biti u direktnoj vezi sa klasičnim dinamičkim sistemima. Međutim, ukoliko bi ova jednačina modelirala neki oscilatorni proces sa naglašenim nelinearnim i disipativnim svojstvima pod dejstvom periodičnih ili neperiodičnih prinudnih sila, po saznanju autora do danas nije pronađeno ni jedno opšte rešenje, čak ni za slučaj skleronomnog tipa ove jednačine. Ovde se izuzimaju asimptotska i aproksimativna rešenja za slučaj male nelinearnosti i slabe prinude. U pogledu studije zakona konzervacije, po autorovom saznanju, tek se nedavno pojavio rad [6] u kom se analizira navedeni problem za jedan vid uopštene Dufingove jednačine, koji se razlikuje od (1.2).

2. Uslovi egzistencije kvadratnih integrala. Generalisane Kilingove jednačine

Analiza zakona konzervacije dinamičkih sistema može se sprovesti na razne načine, ali je zato veoma ograničen broj postupaka koji omogućuju sistematski pristup ovoj problematici. U ovoj će sekciji biti prikazana primena metoda polja generalisanog impulsa (videti [7] i tamo navedenu literaturu) za dobijanje zakona konzervacije.

Jednačina (1.2):

$$\ddot{x}+2k(t)\dot{x}+q(t)x=\lambda x^n f(t)+m(t) \tag{2.1}$$

koja je predmet naše studije, može se izvesti iz Ojler-Lagranževe jednačine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

za Lagranževu funkciju sledećeg oblika:

$$L=\left[\frac{\dot{x}^2}{2}-q(t)\frac{x^2}{2}+\lambda\frac{x^{n+1}}{n+1}f(t)+m(t)x\right]e^{2F} \tag{2.2}$$

gde je: $F=\int k(t)dt$.

U daljem tekstu koristićemo Hamiltonove kanonske jednačine $\dot{x}=\partial H/\partial p$, $\dot{p}=-\partial H/\partial x$, gde je Hamiltonova funkcija data u obliku:

$$H=\frac{1}{2}p^2e^{-2F}+\left[q(t)\frac{x^2}{2}-\lambda\frac{x^{n+1}}{n+1}f(t)-m(t)x\right]e^{2F}. \tag{2.3}$$

Prema tome, kanonski sistem diferencijalnih jednačina kretanja glasi:

$$\dot{x}=pe^{-2F},\quad \dot{p}=-\left[q(t)x-\lambda x^n f(t)-m(t)\right]e^{2F}. \tag{2.4}$$

Mada je rešenje svakog kanonskog sistema moguće u principu naći pomoću Hamilton-Jakobijeve teorije, dobijanje kompletnih rešenja Hamilton-Jakobijeve parcijalne diferencijalne jednačine skopčano je sa znatnim matematičkim teškoćama. U ovom radu će se za dobijanje zakona konzervacije jednačine (2.1) koristiti metod polja generalisanog impulsa. Saglasno sa ovom teorijom polazi se od pretpostavke da se generalisani impuls kanonskog sistema može interpretirati kao funkcija (polje) koja zavisi od koordinate x i vremena t, to jest:

$$p=\Phi(t,x). \tag{2.5}$$

Budući da ovako uvedeno polje impulsa mora biti saglasno sa kanonskim sistemom (2.4), dolazi se do sledeće kvazilinearne jednačine prvog reda, koju ćemo zvati *osnovna jednačina*:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Phi e^{-2F}+\left[q(t)x-\lambda x^n f(t)-m(t)\right]e^{2F}=0. \tag{2.6}$$

Pokazano je [6] da kompletno rešenje ove jednačine $p=\Phi(t,x,C_1,C_2)$ dovodi do opšteg rešenja kanonskog sistema (2.4). Međutim, od velikog je značaja nalaženje nekompletnih rešenja oblika $p=\Phi(t,x,I)$, gde je I proizvoljna konstanta, jer ona u isto vreme predstavljaju zakone konzervacije dinamičkog sistema. Iskustvo pokazuje da je u većini slučajeva pronalaženje nekompletnog rešenja znatno jednostavnije od dobijanja kompletnog rešenja. Pored toga, za dinamičke sisteme Hamiltonovog tipa, poznavanje nekompletnog integrala jednačine (2.6) može u sledećim koracima analize da bude iskorišćeno kao polazna tačka za dobijanje kompletnog rešenja Hamilton-Jakobijeve parcijalne diferencijalne jednačine [8], što smatramo veoma važnom činjenicom koja nas i motiviše za izbor ovog metoda.

Mada za dobijanje nekompletnih rešenja osnovne jednačine ne postoje neke sigurne i precizne sugestije, u mnogim slučajevima korisno je kao grubu orijentaciju pretpostaviti rešenje u takvoj formi koja se dobija rešavanjem izraza (2.3) po generalisanom impulsu p i uvođenjem proizvoljne konstante I na mesto Hamiltonove funkcije, koja, naravno, nije konstanta kretanja. Prema tome, nekompletno rešenje osnovne jednačine pretpostavićemo u obliku :

$$\Phi(t,x,I)=A(t)x+C(t)\left[I+B(t)x+\lambda D(t)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]^{1/2} \tag{2.7}$$

gde su $A(t)$, $C(t)$, $B(t)$ i $D(t)$ nepoznate funkcije vremena koje će biti određene kasnije, a I je konstanta koja se na kraju analize određuje iz zadatih početnih uslova kretanja. Uvrštavanjem ovog izraza u osnovnu jednačinu (2.6) posle sređivanja i grupisanja članova dobija se:

$$\left[\frac{1}{2}C^2(t)B(t)e^{-2F}-m(t)e^{2F}\right]+x\left[\dot{A}(t)+A^2(t)e^{-2F}+q(t)e^{2F}\right]+x^n\left[\frac{1}{2}C^2(t)D(t)e^{-2F}-f(t)e^{2F}\right]+$$
$$\frac{1}{2\Lambda}\left\{2I\left[\dot{C}(t)+A(t)C(t)e^{-2F}\right]+x\left[C(t)\dot{B}(t)+2\dot{C}(t)B(t)+3A(t)C(t)B(t)e^{-2F}\right]+\right. \tag{2.8}$$
$$\left.\lambda\frac{x^{n+1}}{n+1}\left[C(t)\dot{D}(t)+2\dot{C}(t)D(t)+(n+3)A(t)C(t)D(t)e^{-2F}\right]\right\}=0,$$

gde je:

$$\Lambda=\left[I+B(t)x+\lambda D(t)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]^{1/2}.$$

Kako jednačina (2.8) mora biti zadovoljena za svako kretanje $x=x(t)$ dinamičkog sistema (2.4), izrazi u uglastim zagradama moraju biti jednaki nuli, što nas dovodi do sledećeg sistema od četiri nelinearne obične diferencijalne jednačine prvog reda (2.10), (2.12), (2.13) i (2.14) i dve algebarske relacije (2.9) i (2.11):

$$\frac{1}{2}C^2(t)B(t)e^{-2F}-m(t)e^{2F}=0, \tag{2.9}$$

$$\dot{A}(t)+A^2(t)e^{-2F}+q(t)e^{2F}=0, \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{2}C^2(t)D(t)e^{-2F}-f(t)e^{2F}=0, \tag{2.11}$$

$$\dot{C}(t)+A(t)C(t)e^{-2F}=0, \tag{2.12}$$

$$C(t)\dot{B}(t)+2\dot{C}(t)B(t)+3A(t)C(t)B(t)e^{-2F}=0, \tag{2.13}$$

$$C(t)\dot{D}(t)+2\dot{C}(t)D(t)+(n+3)A(t)C(t)D(t)e^{-2F}=0. \tag{2.14}$$

Ovaj sistem jednačina igra istu ulogu kao i sistem generalisanih Kilingovih jednačina u studiji zakona konzervacije preko teorije Emi Neter.

Evidentno je da postojanje algebarskih relacija (2.9) i (2.11) nameće vrlo značajna ograničenja u pogledu strukture dinamičkog sistema, odnosno diferencijalne jednačine (2.1), naročito kada je u pitanju prinudni član $m(t)$ i reonomni faktor $f(t)$ uz nelinearni član. Pronalaženje opšteg rešenja ovog izrazito nelinearnog sistema jednačina nije moguće, pa se dalja njegova analiza svodi na to da se nađe neko partikularno rešenje koje bi dovelo do odgovarajućih zakona konzervacije, a takođe i do modifikacije polaznih kanonskih diferencijalnih jednačina kretanja.

Na osnovu vrlo pažljivog ispitivanja uočeno je da sistem jednačina (2.9)-(2.14) može da dovede do kvadratnih zakona konzervacije ukoliko se uvedu dve nove nepoznate funkcije $w(t)$ i $\psi(t)$ i pretpostavi da je:

$$A(t)=\left(\frac{\dot{w}}{w}-\frac{1}{w^2}\tan\psi-k(t)\right)e^{2F}. \qquad (2.15)$$

Uvrštavanje ove relacije u jednačinu (2.10), posle prostih matematičkih operacija, dovodi nas do sledeće jednačine:

$$\frac{\ddot{w}}{w}-\frac{\dot{\psi}}{w^2}-\frac{\tan^2\psi}{w^2}\left(\dot{\psi}-\frac{1}{w^2}\right)-\dot{k}(t)-k^2(t)+q(t)=0.$$

Ako funkciju ψ izaberemo tako da važi $\dot{\psi}=1/w^2$, odnosno:

$$\psi(t)=\int\frac{dt}{w^2(t)}, \qquad (2.16)$$

poslednja jednačina postaje:

$$\ddot{w}+\left[q(t)-k^2(t)-\dot{k}(t)\right]w=\frac{1}{w^3}. \qquad (2.17)$$

Jednačina (2.17) igra centralnu ulogu u daljem razmatranju. Sada, korišćenjem relacije (2.15) iz jednačine (2.12) sledi:

$$\frac{\dot{C}}{C}=-\frac{\dot{w}}{w}-\frac{(\cos\psi)^{\dot{}}}{\cos\psi}+k(t),$$

odakle se prostom integracijom dobija:

$$C(t)=\frac{C^{*}e^{F}}{w\cos\psi}. \qquad (2.18)$$

U ovoj jednačini C^* predstavlja proizvoljnu integracionu konstantu. Treba naglasiti da je njen status, kao i status svih konstanti koje će se dobiti rešavanjem sistema (2.9)-(2.14), sasvim različit od statusa konstante I koja figuriše u izrazu (2.7). Naime, konstantu I, kao što je već naglašeno, određujemo iz početnih uslova kretanja kanonskog sistema (2.4), dok ostale konstante nisu stešnjene nikakvim početnim ili graničnim uslovima i možemo ih birati potpuno proizvoljno.

Korišćenjem dobijenih izraza za $A(t)$ i $C(t)$, jednačine (2.13) i (2.14) posle integracije daju:

$$B(t)=\frac{B^{*}e^{F}}{w\cos\psi}, \quad D(t)=D^{*}\left(\frac{e^{F}}{w\cos\psi}\right)^{n+1}, \qquad (2.19)$$

gde su B^* i D^* proizvoljne konstante. Sa ovim rezultatima iz algebarske jednačine (2.11) sledi da je funkcija $f(t)$ uz nelinearni član data izrazom:

$$f(t)=\frac{e^{(n-1)F}}{w^{n+3}\cos^{n+3}\psi}. \qquad (2.20)$$

Pri tome su, radi jednostavnosti, usvojene sledeće vrednosti za integracione konstante: $C^*=1$, $D^*=2$. Konačno, birajući da je $B^*=2$, na osnovu jednačine (2.9) dobija se da prinudni član mora biti oblika:

$$m(t)=\frac{e^{-F}}{w^3\cos^3\psi}. \tag{2.21}$$

Sprovođena analiza nam pokazuje da nalaženje rešenja sistema jednačina (2.9)-(2.14) neposredno dovodi i do nekompletnog rešenja osnovne jednačine (2.6) u formi datoj izrazom (2.7), ali nam istovremeno, imajući u vidu (2.5), pruža prvi integral kanonskih jednačina kretanja (2.4) koji se može zapisati na sledeći način:

$$\left(\frac{p}{C(t)}-\frac{A(t)}{C(t)}x\right)^2-B(t)x-\lambda D(t)\frac{x^{n+1}}{n+1}=I=const. \tag{2.22}$$

Ova činjenica opravdava podvlačenje analogije između sistema jednačina (2.9)-(2.14) i generalisanih Kilingovih jednačina u teoriji Emi Neter. Pored toga, specifičnost problema koji je ovde analiziran pokazala je da je egzistencija zakona konzervacije, odnosno rešenja generalisanih Kilingovih jednačina, uslovljena posebnom strukturom diferencijalnih jednačina kretanja, naročito njegovog linearnog dela, iskazanom kroz jednačine (2.20) i (2.21). Ovakav ishod analize nije neuobičajen i podseća nas da je u studiji prvih integrala dinamičkih sistema neophodno činiti kompromise u pogledu njihove strukture da bi se obezbedila rešivost sistema generalisanih Kilingovih jednačina. Stoga se dobijeni rezultati mogu sažeti u vidu sledeće teoreme.

TEOREMA. Nelinearni dinamički sistem čije je ponašanje opisano sistemom kanonskih diferencijalnih jednačina kretanja:

$$\dot{x}=pe^{-2F},$$

$$\dot{p}=-q(t)xe^{2F}+\lambda x^n\frac{e^{(n+1)F}}{w^{(n+3)}(t)\cos^{(n+3)}\left(\int\frac{dt}{w^2(t)}\right)}+\frac{e^F}{w^3(t)\cos^3\left(\int\frac{dt}{w^2(t)}\right)}, \tag{2.23}$$

ima zakon konzervacije oblika:

$$I=\frac{1}{2}\left\{\left[pwe^{-F}-x(\dot{w}-k(t)w)e^F\right]\cos\left(\int\frac{dt}{w^2(t)}\right)+\frac{x}{w}e^F\sin\left(\int\frac{dt}{w^2(t)}\right)\right\}^2-$$

$$-x\frac{e^F}{w\cos\left(\int\frac{dt}{w^2(t)}\right)}-\lambda\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{e^F}{w\cos\left(\int\frac{dt}{w^2(t)}\right)}\right)^{n+1}=const. \tag{2.24}$$

gde je $w(t)$ bilo kakvo rešenje pomoćne jednačine (2.17):

$$\ddot{w}+\left(q(t)-k^2(t)-\dot{k}(t)\right)w=\frac{1}{w^3}.\blacksquare$$

Formulacija osnovnog rezultata sprovedene analize data je u duhu Luisove teorije. Naime, zakon konzervacije (2.25) je izražen u funkciji parametara dinamičkog sistema $k(t)$ i $q(t)$ i funkcije $w(t)$ koja mora zadovoljiti jednačinu (2.17). Kako se rešenju ove jednačine ne nameću nikakvi dopunski (početni ili granični) uslovi, onda se može reći da je jednačinom (2.25) opisana čitava klasa zakona konzervacije dinamičkog sistema (2.24). Važno je napomenti da interpretacija ovog rezultata može poprimiti sasvim drugačiji ton ako se povedemo za formulacijom koju daje Ranganathan [4]. U tom slučaju bi se pomoćna jednačina (2.17) ravnopravno pridružila jednačinama (2.24) kao jednačina koja opisuje ponašanje dinamičkog sistema, a izraz (2.25) bi bio tretiran kao zakon konzervacije dinamičkog sistema sa dva stepena slobode.

Dobijeni rezultati, koji su opšteg karaktera, mogu se vrlo lako primeniti i na specijalni slučaj, kada je prinudni član u kanonskon sistemu (2.4) jednak nuli, tj. $m(t)=0$. I u ovom posebnom slučaju, po autorovom saznanju, ovakvi tipovi zakona konzervacije kanonskog sistema (2.26) nisu do danas publikovani. Jedino je u radu [8] analiziran ovaj problem, ali se dobijeni rezultat razlikuje od rezultata ovog rada.

3. Primer

U cilju ilustrovanja prethodne analize prikazaćemo jedan primer preuzet iz poznatog Kamkeovog zbornika [9]. Njegova privlačnost se ogleda u činjenici da predstavlja čitavu klasu dinamičkih sistema. Neka su funkcije $k(t)$ i $q(t)$ date sledećim izrazima:

$$k(t)=\frac{1}{2}\varphi(t),\quad q(t)=\frac{1}{4}\varphi^2(t)+\frac{1}{2}\dot{\varphi}(t)+a,\quad a=const., \tag{3.1}$$

gde je $\varphi(t)$ unapred zadata funkcija. Ovakva struktura linearnih reonomnih članova obezbeđuje da se pomoćna jednačina svede na integrabilni oblik, jer je:

$$q(t)-k^2(t)-\dot{k}(t)=a=const. \tag{3.2}$$

Jasno je da se pomoćna jednačina (2.17) može diskutovati za različite vrednosti konstante a. Ovde ćemo se zadržati samo na slučaju kada je $a>0$, jer tada nije teško pokazati da je jedno partikularno rešenje jednačine (3.3) sledećeg oblika:

$$w^2=\sqrt{1+(1/a)}+\sin\left(2\sqrt{a}t\right). \tag{3.3}$$

Sada se na osnovu relacija (2.20) i (2.21) u potpunosti mogu odrediti prinudni član $m(t)$ i koeficijent uz nelinearni član $f(t)$ koji glase:

$$f(t)=\frac{\exp\left(\frac{n-1}{2}\int\varphi(t)dt\right)}{\left[\sqrt{1+(1/a)}+\sin\left(2\sqrt{a}t\right)\right]^{\frac{n+3}{2}}\cos^{n+3}\left(\int\left[\sqrt{1+(1/a)}+\sin\left(2\sqrt{a}t\right)\right]^{-1}dt\right)}, \tag{3.4}$$

$$m(t)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\int\varphi(t)dt\right)}{\left[\sqrt{1+(1/a)}+\sin\left(2\sqrt{a}t\right)\right]^{3/2}\cos^{3}\left(\int\left[\sqrt{1+(1/a)}+\sin\left(2\sqrt{a}t\right)\right]^{-1}dt\right)}. \tag{3.5}$$

Na ovaj način su određeni svi parametri koji opisuju dinamički sistem (2.23), a rešenje (3.4) pomoćne jednačine nam omogućuje da dobijemo eksplicitni oblik zakona konzervacije (2.24), koji će ovde zbog ograničenog obima rada biti izostavljen.

Literatura

[1] Lewis, H. R. Jr., Class of Exact Invariants for Classical and Quantum Time-Dependent Harmonic Oscillators, J. Math. Physics, **9**, 11, pp. 1976-1986., 1968.

[2] Symon, K. R., The Adiabatic Invariant of the Linear or Nonlinear Oscillator, J. Math. Physics, **11**, 4, 1970.

[3] Gunther, N. J., Leach, P. G. L., Generalized Invariants for the Time-Dependent Harmonic Oscillator, J. Math. Physics, **18**, pp. 572-576, 1977.

[4] Ranganathan, P. V., Invariants of a Certain Non-Linear *N*-dimensional Dynamical Systems, Int. J. Non-Linear Mechanics, **27**, 1, pp. 43-50, 1992.

[5] Ranganathan, P. V., Integrals of the Emden-Fowler Equations, Int. J. Non-Linear Mechanics, **27**, 4, pp. 583-590, 1992.

[6] Vujanovic, B. D., Conservation Laws and Reduction to Quadratures of the Generalized Time-Dependent Duffing Equation, Int. J. Non-Linear Mechanics, **30**, 6, pp. 783-792, 1995.

[7] Vujanovic, B. D., Jones, S. E., *Variational Methods in Nonconservative Phenomena*, Academic Press, Boston, 1989.

[8] Vujanovic, B. D., Application of the Field-Momentum Method to Rheonomic Dynamics, Int. J. Non-Linear Mechanics, **29**, 4, pp. 515-528, 1994.

[9] Kamke, E., Differentialgleichungen Lösungmethoden und Lösungen, I Gevönliche Differentialgleichungen, Leipzig, 1959.