ЈДМ ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ЗА МЕХАНИКУ
Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука
СИМПОЗИЈУМ ИЗ ОПШТЕ МЕХАНИКЕ
Нови Сад, 29. и 30. септембар 1994.

O UTICAJU TRENJA NA OPTIMALNI OBLIK OBRTNOG TELA PRI HIPERZVUČNOM STRUJANJU

SRBOLJUB S. SIMIĆ

Abstract. An influence of the skin friction on the optimum minimum-drag shape of the body of revolution is examined using the Pontryagin's maximum principle. Two classes of solutions are found, one of them containing a singular subarc. It is shown that these results are, in special cases, same as the results previously obtained by other authors.

1. UVOD

Poznato je da je još Njutn započeo analizu oblika tela koje pruža minimalan otpor nailazećoj gasnoj struji. Usvajajući korpuskularni model gasa i pretpostavljajući da je strujanje oko obrtnog tela osnosimetrično Njutnova analiza je dovela do odgovarajućeg izraza za lokalni koeficijent pritiska [1,4]:

$$C_p=\frac{p}{\frac{1}{2}\rho v^2}=4\sin^2\theta=\frac{4y'^2}{1+y'^2}\ ,\quad y'=\frac{dy}{dx} \tag{1}$$

gde je p lokalni pritisak, ρ gustina i v brzina neuznemirene gasne struje, a $y=y(x)$ i θ su ordinata konture tela i ugao nagiba konture u odnosu na osu tela (slika 1.). Pokazalo se da izraz (1) dobro opisuje slučaj strujanja velikim nadzvučnim (hiperzvučnim) brzinama.

U ovom radu se razmatra problem određivanja optimalnog oblika tela kada osim talasnog otpora, opisanog jednačinom (1), postoji i efekat površinskog trenja izražen u vidu koeficijenta trenja $C_f=A/x^\alpha$ ($A=constans$). Smatrajući dužinu tela L zadatom, koeficijent trenja se može opisati sledećim izrazom:

$$C_f=C_{fs}(1-\alpha)\left(\frac{x}{L}\right)^{-\alpha}\ . \tag{2}$$

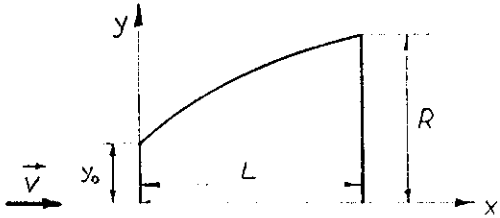
Sa C_{fs} je u poslednjem izrazu označen srednji koeficijent trenja, a konstanta α predstavlja parametar strujanja koji za različite strujne režime ima sledeće vrednosti:

- α = 0 za model idealnog strujanja,
- α = 1/5 za model turbulentnog strujanja i
- α = 1/2 za model laminarnog strujanja.

Ukupan otpor koji telo pruža gasnoj struji tada se može prikazati u vidu sledećeg funkcionala:

$$\frac{F}{4\pi\rho V^2}=\frac{y_0^2}{2}+\frac{1}{4}\int_0^L y\,(C_p y'+C_f)\,dx\ , \tag{3}$$

gde je sa F označena sila otpora tela, a $y_0=y(0)$ predstavlja radijus nosa tela.



slika 1. Fizički model strujanja

Ovaj su problem razmatrali Miele i Koul [2] u slučaju tankog tela ($y'^2 \ll 1$) primenom metoda varijacionog računa i Brajson [3] koristeći teoriju optimalnog upravljanja uz ograničenje na konstantni koeficijent trenja ($\alpha=0$). U oba rada je uočena direktna zavisnost optimalnog rešenja od veličine koeficijenta trenja, ali se između njihovih rezultata ne može uspostaviti direktna korespondencija. Naime, Miele i Koul [2] su pokazali da postoje dve grupe rešenja: kod prve je ekstremala funkcija klase C^1, a drugu karakteriše oštrica nulte debljine ($y=0$) za kojom sledi funkcija klase C^2. Brajson [3], međutim, uticaj trenja prikazuje kroz mogućnost da dužina tela bude manja od unapred zadate.

Cilj ovog rada je proširivanje Brajsonovih rezultata na slučaj promenljivog koeficijenta trenja (2) primenom Pontrjaginovog principa maksimuma. Uticaj veličine koeficijenta trenja na optimalno rešenje ovde se prikazuje kroz mogućnost egzistencije singularnog intervala, odnosno singularnog optimalnog upravljanja [5].

2. POSTAVKA PROBLEMA

Da bi se formulisao problem optimalnog upravljanja, upravljačka funkcija će biti uvedena kao nagib konture: $y'=u$. Tada se, nakon uvođenja bezdimenzijskih promenljivih $X=x/L$, $Y=y/L$ i bezdimenzijskog parametra - relativne debljine $\tau=R/L$ ($y(L)=R$), može postaviti zadatak: minimizirati funkcional

$$I_D=\frac{Y_0^2}{2}+\int_0^1 Y\left[\frac{U^3}{1+U^2}+\frac{1}{4}C_{fs}(1-\alpha)X^{-\alpha}\right]dX\ , \tag{4}$$

s obzirom na sledeće uslove:

$$Y'=dY/dX=U\ , \tag{5}$$

$$U\geq 0\ , \tag{6}$$

$$Y(1)=\tau\ . \tag{7}$$

Hamiltonijan ovog sistema je:

$$H=Y\left[\frac{U^3}{1+U^2}+\frac{1}{4}C_{fs}(1-\alpha)X^{-\alpha}\right]+PU\ , \tag{8}$$

gde je $P=P(X)$ neodređeni množitelj - generalisani impuls. Koeficijent otpora je tada određen sledećim izrazom:

$$C_D=\frac{F}{\frac{1}{2}\rho v^2R^2\pi}=\frac{8}{\tau^2}I_D\ . \tag{9}$$

Neophodni uslov ekstrema $\delta I_0=0$ nas snabdeva konjugovanom kanonskom jednačinom upravljanja:

$$P'=-\frac{\partial H}{\partial Y}=-\frac{U^3}{1+U^2}-\frac{1}{4}C_{fs}(1-\alpha)X^{-\alpha}\ , \tag{10}$$

prirodnim graničnim uslovom:

$$Y(0)+P(0)=0 \tag{11}$$

i uslovom optimalnosti:

$$\frac{\partial H}{\partial U}=Y\left[\frac{U^2(3+U^2)}{(1+U^2)^2}+\frac{P}{Y}\right]=0\ . \tag{12}$$

Ograničenje (6) na upravljačku funkciju ovde se javlja kao prirodna posledica implicitne pretpostavke Njutnovog modela strujanja da je kontura tela opisana monotonom funkcijom.

Odmah se uočava da uslov optimalnosti u početnoj tački $X=0$ generiše dva različita slučaja: i) $Y(0)\neq 0$; tada se upravljanje, uz pomoć izraza (11), može odrediti iz uslova optimalnosti: $U(0)=1$, ii) $Y(0)=0$; upravljanje u početnoj tački nije moguće odrediti iz uslova optimalnosti, a posledica prirodnog graničnog uslova (11) je $P(0)=0$. Pokazaće se da ovo predstavlja ključnu informaciju u analizi uticaja trenja na optimalni oblik tela.

3. ANALIZA REŠENJA

Rešenje postavljenog problema u zatvorenoj formi nađeno je samo za slučaj konstantnog koeficijenta trenja ($\alpha=0$). Zato se pribeglo numeričkoj studiji problema, pri čemu se C_k tretirao kao nenegativni realni parametar. Pokazalo se da promena njegove vrednosti utiče na rešenje problema: sa povećanjem vrednosti srednjeg koeficijenta trenja smanjuje se radijus nosa tela Y_0. Stoga se prišlo definisanju pojma granične vrednosti koeficijenta trenja C_{fs^*} kao one njegove vrednosti pri kojoj je radijus nosa $Y_0=0$, a kontura tela je opisana neprekidno diferencijabilnom funkcijom. Obzirom da je $Y(X)\neq 0$ za $X>0$, upravljanje u graničnom slučaju i sama granična vrednost C_k^* koeficijenta trenja se dobijaju iz asimptotskog uslova:

$$\lim_{X\to 0^+}\left[\frac{2U^2}{(1+U^2)^2}-\frac{1}{4U}C_{fs}(1-\alpha)X^{-\alpha}\right]=0 \tag{13}$$

koji sledi iz uslova optimalnosti (12). Nužnost primene asimptotskog uslova (13) sledi iz činjenice da je tačka $X=0$ singularna za diferencijalnu jednačinu (10).

Može se primetiti da je u graničnom slučaju:

$$\lim_{X\to 0^+} H(Y,P,U,X)=0 \ , \tag{14}$$

na šta treba obratiti posebnu pažnju u analizi rešenja pri vrednostima koeficijenta trenja većim od granične. Da bi se u tom slučaju našlo rešenje problema pretpostaviće se egzistencija konačnog intervala $X\in(0,X_c)$ u kom Hamiltonijan ne zavisi od upravljanja U (*singularni interval*). Ako Hamiltonijan prepišemo u sledećem vidu:

$$H=H_0+\Psi_1 H_1+\Psi_2 H_2 \tag{15}$$

gde je:

$$\begin{aligned} &H_0=\frac{1}{4}C_{fs}(1-\alpha)X^{-\alpha}Y \ , \\ &H_1=U \ , \quad \Psi_1=P \ , \\ &H_2=\frac{U^3}{1+U^2} \ , \quad \Psi_2=Y \ , \end{aligned} \tag{16}$$

onda vidimo da Ψ_1 i Ψ_2 igraju ulogu funkcija prekljućenja (*switching functions*) koje, kao što je poznato, u singularnom intervalu moraju ispuniti uslov:

$$\Psi_i(Y,P,X)\equiv 0 \quad za \quad X\in(0,X_c) \quad (i=1,2) \tag{17}$$

odakle sledi:

$$\Psi_i'(X)=\Psi_i''(X)=\ldots=0 \quad za \quad X\in(0,X_c) \quad (i=1,2) \ . \tag{18}$$

Razmotrimo sledeće slučajeve.

1) Neka je $\Psi_1=P\equiv 0$ za $X\in(0,X_c)$. Tada zbog (18) imamo $\Psi_1'=P'=0$. Iz jednačine (10) se vidi da pri $C_k>0$ i $X>0$ poslednji uslov može biti zadovoljen samo ako je $U<0$, čime se narušava ograničenje (6), pa ovu mogućnost moramo odbaciti.

2) Neka je $\Psi_2=Y\equiv 0$ za $X\in(0,X_c)$. Jednačina (18) sada implicira:

$$\Psi_2'=Y'=U=0 \quad za \quad X\in(0,X_c) \ . \tag{19}$$

Lako se uočava da uslov egzistencije singularnog intervala dovodi do sledećeg identiteta:

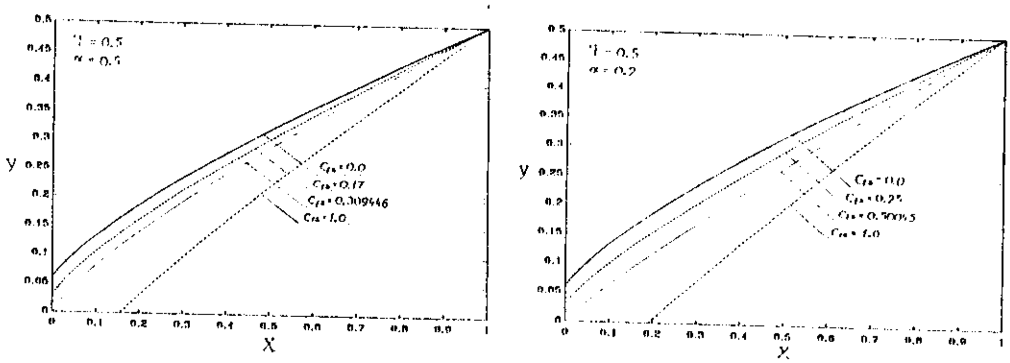
$$H(Y,P,U,X)\equiv 0 \quad za \quad X\in(0,X_c) \ . \tag{20}$$

Ovako određenom singularnom intervalu, u smislu teorije optimalnog upravljanja, odgovara oštrica nulte debljine i nultog nagiba, kakva je viđena i u [2].

Zbog (19) jednačina (10) se u singularnom intervalu može rešiti u zatvorenoj formi, a integraciona konstanta se određuje iz uslova optimalnosti u tački prelaza sa singularnog na nesingularni deo trajektorije, imajući u vidu da kontura tela mora biti neprekidna funkcija ($Y(X_c)=0$). Odatle sledi:

$$P(X)=\frac{1}{4}C_{fs}\left[X_c^{1-\alpha}-X^{1-\alpha}\right] \ , \quad X\in(0,X_c) \ . \tag{21}$$

Za određivanje apscise prelazne tačke X_c i upravljanja $U(X_c)$ koristi se uslov analogan asimptotskom uslovu (13) koji, zahvaljujući činjenici da $X=X_c\neq 0$ nije singularna tačka diferencijalnih jednačina,

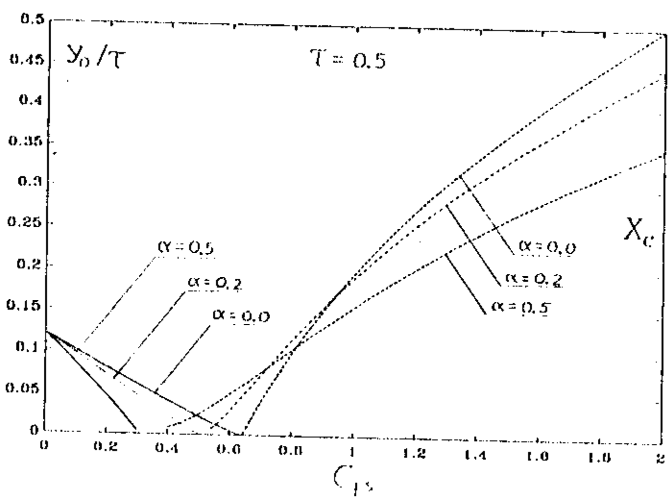


slika 2. Optimalni oblici tela

može biti zapisan u sledećem vidu:

$$\frac{U^3(X_c)}{[1+U^2(X_c)]^2} = \frac{1}{8} C_{fs}(1-\alpha) X_c^{-\alpha} \; . \qquad (22)$$

Singularni deo trajektorije je u intervalu $X \in [X_c, 1]$ praćen nesingularnim rešenjem postavljenog problema.



slika 3. Radijus nosa i apscisa tačke prelaza

Rezultati numeričkog rešavanja postavljenih jednačina pokazuju opravdanost uvedenih pretpostavki. Na slici 3. je pokazano da se kontinualnom promenom koeficijenta trenja ostvaruje prelaz sa jednog tipa rešenja ($Y_0 > 0$) na drugi ($X_c > 0$). Sami optimalni oblici za $\tau = 0.5$ pri turbulentnom i laminarnom strujanju prikazani su na slici 2.

4. REŠENJE PRI KONSTANTNOM KOEFICIJENTU TRENJA

Kao što je već rečeno, u slučaju konstantnog koeficijenta trenja ($\alpha = 0$) rešenje se može naći u zatvorenoj formi. Pošto tada nezavisno promenljiva ne figuriše eksplicitno u Hamiltonijanu, on će biti konstanta kretanja. To u podgraničnom slučaju, uz prirodni granični uslov (11), dovodi do relacije:

$$H=H(0)=\frac{Y_0}{2}\left(\frac{1}{2}C_{fs}-1\right) . \tag{23}$$

Jednačine (5),(12) i (23) nam tada omogućuju da optimalnu trajektoriju izrazimo u parametarskom obliku:

$$\begin{aligned} X&=Y_0A(U,C_{fs}) \ , \quad A(U,C_{fs})=4\left(1-\frac{1}{2}C_{fs}\right)\int_U^1\frac{U(1+U^2)(3-4U^2)}{\left[\frac{1}{2}C_{fs}(1+U^2)^2-4U^3\right]^2}dU \ , \\ Y&=Y_0B(U,C_{fs}) \ , \quad B(U,C_{fs})=\frac{\left(\frac{1}{2}C_{fs}-1\right)(1+U^2)^2}{\frac{1}{2}C_{fs}(1+U^2)^2-4U^3} . \end{aligned} \tag{24}$$

Odatle se može doći do sistema od dve algebarske jednačine:

$$\tau=\frac{B(U_1,C_{fs})}{A(U_1,C_{fs})} \ , \quad \frac{Y_0}{\tau}=\frac{1}{B(U_1,C_{fs})} \ , \quad U_1=U(1) \ , \tag{25}$$

pomoću kog pri zadatim C_{fs} i τ možemo odrediti nagib u krajnjoj tački i poluprečnik nosa tela.

Granična vrednost koeficijenta trenja se dobija iz jednačine (23), uz uslov $Y_0=0$ i korišćenje uslova optimalnosti (12):

$$H=Y\left[-\frac{2U^3}{(1+U^2)^2}+\frac{1}{4}C_{fs}\right]=0 . \tag{26}$$

Kako je $H=const.$ i $Y\neq 0$, upravljanje mora biti konstantno duž trajektorije, što u graničnom slučaju daje:

$$U^*=\tau \ \rightarrow \ C_{fs}^*=\frac{8\tau^3}{(1+\tau^2)^2} . \tag{27}$$

Rešenje problema za nadgranične vrednosti koeficijenta trenja podrazumeva postojanje singularnog intervala, razmotrenog u prethodnom odeljku. Posledica uslova njegove egzistencije (17),(18) je identitet (20), koji se zbog konstantnosti Hamiltonijana na nesingularnom delu trajektorije svodi na (26). Zato će opet biti $U=const.$, a veza upravljanja i apscise tačke prelaza glasi:

$$U=\frac{\tau}{1-X_c} , \tag{28}$$

pa se pri zadatom koeficijentu trenja i relativnoj debljini X_c može odrediti iz jednačine (22).

Brajson [3] je, podstaknut izrazom (26), pretpostavio mogućnost da gornja granica nezavisno promenljive X u nadgraničnom slučaju nije specificirana. Takva analiza ga je dovela do rezultata koji su analogni ovde prikazanim, ali koji se ne mogu proširiti na slučaj promenljivog koeficijenta trenja (jer tada Hamiltonijan nije konstantan duž cele trajektorije), niti u sebi kao specijalan slučaj sadrže rezultate dobijene za tanka tela [2].

5. REŠENJE ZA SLUČAJ TANKOG TELA

Ograničenje za tanko telo, spomenuto u uvodu, u prikazanoj postavci problema dopušta sledeću aproksimaciju:

$$U^2 < 1 \quad \rightarrow \quad 1+U^2 \approx 1 \ . \tag{29}$$

Smatrajući da tanko telo može imati samo oštar nos, funkcional problema možemo zapisati na sledeći način:

$$I_D = \int_0^1 Y\left[U^3 + \frac{1}{4} C_{fs} (1-\alpha) X^{-\alpha}\right] dX \ , \tag{30}$$

a Hamiltonijan sistema, kanonske jednačine upravljanja, granični uslovi i uslov optimalnosti su opisani sledećim izrazima:

$$\begin{gathered} H = Y\left[U^3 + \frac{1}{4} C_{fs} (1-\alpha) X^{-\alpha}\right] + PU \ , \\ Y' = U \ , \quad P' = -U^3 - \frac{1}{4} C_{fs} (1-\alpha) X^{-\alpha} \ , \\ Y(0) = 0 \ , \quad Y(1) = \tau \ , \\ \frac{\partial H}{\partial U} = 3YU^2 + P = 0 \ . \end{gathered} \tag{31}$$

Jasno je da uslov optimalnosti $(31)_4$ može biti zadovoljen samo kada je $P(X) \leq 0$. Ako se osvrnemo na jednačinu (21), videćemo da je u singularnom intervalu $P(X) > 0$, što nas može ohrabriti da i ovde potražimo rešenje na isti način.

Graničnom vrednošću koeficijenta trenja ovde ćemo smatrati onu njegovu vrednost pri kojoj je $P(X) = 0$. Upravljanje u početnoj tački bi se tada moglo odrediti iz asimptotskog uslova analognog uslovu (13). Međutim, Miele i Koul [2] su pokazali da se rešenje problema (31) u graničnom slučaju može naći u vidu stepene funkcije:

$$Y = \tau X^n \ , \tag{32}$$

gde je n nepoznati konstantni parametar. Lako se pokazuje da nakon rešavanja kanonskih jednačina $(31)_2$ i uvrštavanja rešenja u uslov optimalnosti $(31)_4$ dobijamo sledeće vrednosti za n:

$$\begin{aligned} &i) \quad n = 3/4 \ , \quad C_{fs} = 0 \ , \\ &ii) \quad n = 1 - \frac{\alpha}{3} \ , \quad \frac{C_{fs}}{\tau^3} = \frac{8}{27} \, \frac{(3-\alpha)^2 (3-4\alpha)}{1-\alpha} \ , \end{aligned} \tag{33}$$

što je u potpunoj saglasnosti sa rezultatima datim u [2].

Konačno, lako se proverava da u nadgraničnom slučaju postoji singularni interval kakav je utvrđen u opštem slučaju. Generalisani impuls $P = P(X)$ je u tom intervalu opisan izrazom identički jednakim funkciji (21), a veza između upravljanja i apscise prelazne tačke glasi:

$$U(X_c) = \frac{1}{2}\left[C_{fs} (1-\alpha) X_c^{-\alpha}\right]^{1/3} \ . \tag{34}$$

6. ZAVRŠNE NAPOMENE

Postojanje singularnog intervala je u ovom radu poslužilo za opisivanje jedne klase optimalnih oblika obrtnih tela pri hiperzvučnom strujanju u prisustvu površinskog trenja. Sa aspekta teorije optimalnog upravljanja može se govoriti o primeru singularnog rešenja za dinamički sistem u čijem Hamiltonijanu eksplicitno figuriše nezavisno promenljiva i u kom upravljanje nije linearno.

Međutim, ostalo je otvoreno pitanje optimalnosti dobijenog singularnog rešenja, odnosno egzistencije nesingularne trajektorije pod istim uslovima. Ovom pitanju, kao i dubljoj analizi zavisnosti otpora tela od koeficijenta trenja trebalo bi se posvetiti u daljem istraživanju.

LITERATURA

[1] У.Д. Хейз: Формула давления Ньютона u А. Миеле: Теория оптимальних аеродинамических форм, Мир, Москва 1969.

[2] А. Миеле, Дж. Коул: Оптимальные тонкие тела с переменным коеффициентом трения, ibid.

[3] А. Брайсон: Влияние трения на оптимальную форму нетонких тел вращения, ibid.

[4] B.D. Vujanović: Metodi optimizacije, RU "Radivoj Ćirpanov", Novi Sad 1980.

[5] C.D. Johnson: Singular Solutions in Problems of Optimal Control u C.T. Leondes: Advances in Control Systems, vol.2, Academic Press, New York 1965.

[6] D.E. Kirk: Optimal Control Theory, Prentice-Hall, New Jersey 1970.

[7] A.E. Bryson, Yu-Chi Ho: Applied Optimal Control, Hemisphere, Washington 1975.